绍兴文理学院2020年硕士研究生入学考试初试试题（A卷）

报考专业：基础数学、计算数学、应用数学、数学教育

考试科目：高等代数　　　　科目代码：851

注意事项：本试题的答案必须写在规定的答题纸上，写在试题上不给分。

一、填空题（共 32 分，每小题 4 分）

1.（4 分）设 $f(x)=8x^3+9x^2+10x+11=8(x-1)^3+a_2(x-1)^2+a_1(x-1)+38$，

则 $a_2=$______，$a_1=$______。

2.（4 分）若 $\alpha=(1,1,1,1)$，$\beta=(1,2,4,8)$，$\gamma=(1,-1,1,-1)$，$\delta=(1,3,9,27)$，则 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 线性__________。

3.（4 分）设 A 是一个 3 阶可逆矩阵，且 $|A|=2$，则 A 的伴随矩阵的行列式等于__________。

4.（4 分）数域 P 上两个有限维线性空间 V_1 和 V_2 同构的充分必要条件是____________________。

5.（4 分）实数域 R 上 2 阶方阵集合关于矩阵加法和数乘所构成的线性空间 $R^{2\times2}=\left\{\left(a_{ij}\right)_{2\times2} \mid a_{ij}\in R\right\}$ 的维数为__________。

6.（4 分）已知线性变换 ρ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 ρ 在基 $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$ 下的矩阵为________________________。

7.（4 分）λ-矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{pmatrix}$ 的不变因子是______________________。

8.（4 分）向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到向量组 $\alpha_n,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 的过渡矩阵为______________。

二、计算题（共 90 分，每小题 15 分）

1.（15 分）求 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2$ 的重因式，且指出其重数。

2.（15 分）计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1+b_1&b_1&b_1&\cdots&b_1\\b_2&a_2+b_2&b_2&\cdots&b_2\\b_3&b_3&a_3+b_3&\cdots&b_3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b_n&b_n&b_n&\cdots&a_n+b_n\end{vmatrix}$（$a_k\neq0,k=1,2,\cdots,n$）。

3．（15 分）讨论 a_1,a_2,a_3,a_4 满足什么条件时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_3+x_4=a_2 \\ x_1+x_3=a_3 \\ x_2+x_4=a_4 \end{cases}$ 有解？在有解的情形求一般解。

4．（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，证明：$E-A$ 是可逆矩阵，并求 $E-A$ 的逆矩阵，其中 E 为5阶单位矩阵。

5．（15 分）求非退化线性替换使二次型 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$ 化为标准形，并判定该二次型是否正定。

6．（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 和对角矩阵 D，使得 $Q^{-1}AQ=D$。

三、证明题（共 28 分，每小题 14 分）

1.（14 分）设 P 为数域，$A\in P^{m\times m},B\in P^{n\times n}$，证明：$r\begin{pmatrix} A & O_{m\times n} \\ O_{n\times m} & B \end{pmatrix}=r(A)+r(B)$，其中 $r(A)$，$r(B)$ 为矩阵 A，B 的秩。

2．（14 分）设 P 为数域，A 是 n 阶方阵，$W_1=\{X\mid (A-E)X=0,X\in P^n\}$，$W_2=\{X\mid (A+E)X=0,X\in P^n\}$，$W_1,W_2$ 都是 P^n 的子空间，证明 $P^n=W_1\oplus W_2$ 的充要条件是 $A^2=E$，其中 E 为单位矩阵。